

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Espace de Hilbert</b>	<b>1</b>
1.1	Propriétés élémentaires . . . . .	1
1.1.1	Convergence d'une Suite . . . . .	3
1.1.2	Suite de Cauchy . . . . .	3
1.2	Projection Orthogonale . . . . .	3
1.3	Bases Hilbertiennes . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Les équations intégrales</b>	<b>9</b>
2.1	Introduction . . . . .	9
2.2	Equation intégrale : . . . . .	9
2.3	Classification des équations intégrales . . . . .	10
2.4	Existence et l'unicité de la solution . . . . .	11
2.5	Résolution numérique : . . . . .	13
2.5.1	Méthodes numériques : . . . . .	13
2.5.2	Méthode de collocation . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Ondelette de Haar</b>	<b>15</b>
3.1	introduction : . . . . .	15
3.2	Système de Haar . . . . .	16
3.3	Propriétés d'ondelette de Haar : . . . . .	17
3.4	Methode d'ondelette de Haar : . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Application</b>	<b>23</b>
4.0.1	Système linéaire des équations intégrales de Fredholm : . . . . .	27



# Chapitre 1

## Espace de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont la version la plus proche des espaces de dimension finie en caractéristiques (des espaces euclidiens ou hermitiens), dont ils gardent beaucoup de propriétés.

En fait, ils trouvent leur origine dans la théorie du développement de fonctions arbitraires en séries de fonctions orthogonales, celles-ci apparaissant le plus souvent comme fonctions propres de certains opérateurs différentiels linéaires (séries de Fourier, fonctions sphériques, polynômes orthogonaux).

Ils fournissent le cadre mathématique dans lequel la science moderne et jouent un rôle important dans beaucoup de branches des mathématiques, spécialement en analyse linéaire.

### 1.1 Propriétés élémentaires

**Définition 1** (*produit scalaire*)

On appelle produit scalaire sur  $H$  (ou forme hermitienne définie positive). Si il existe une fonction

$$\langle ., . \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

Vérifiant les conditions suivantes :

1.  $\langle f, f \rangle \geq 0 \ \forall f \in H$ .
2.  $\langle f, f \rangle = 0$  si et seulement si  $f = 0$ .
3.  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$  pour tous  $f, g \in H$ .
4.  $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$  pour tous  $f, g, h \in H$  et tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Des propriétés 3 et 4 ci-dessus, nous avons la propriété suivante trop :  
 $\langle h, \alpha f + \beta g \rangle = \overline{\alpha} \langle h, f \rangle + \overline{\beta} \langle h, g \rangle$  pour tous  $f, g, h \in H$  et tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  
 – le produit scalaire de deux vecteur :

$$\langle u, v \rangle = \sum_i u_i * v_i$$

– le produit scalaire de deux fonctions :

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)dx$$

**Définition 2** Si  $f \in H$ , on définit la norme de  $f$  par :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

**Définition 3** (Espace vectoriel normé)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on appelle norme sur l'espace  $E$ , Toute application normé  $\|\cdot\|$  définie sur  $E$  et à valeur dans  $\mathbb{R}_+$ , vérifiant pour tout  $x, y$  dans  $E$  et  $\alpha$  dans  $\mathbb{k}$  :

1.  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = o$ .
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (homogène).
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire).

**Exemple 4**

$$\langle f(x), f(x) \rangle = \|f\|_2 = \left( \int |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

**Définition 5** un espace préhilbertien est un espace vectoriel (sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) muni d'un produit scalaire.

**Théorème 6** (Inégalité de Cauchy-Schwarz) pour tout  $f, g \in G$ ,

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

L'égalité tient si et seulement si  $f$  et  $g$  sont linéairement dépendants.

**Preuve.** voir [2] ■

### 1.1.1 Convergence d'une Suite

**Définition 7** On dit que la suite numérique  $(u_n)$  est convergente si :

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists N \quad n \succeq N \implies \|u_n - u\| \prec \varepsilon$$

Toute suite convergente est une suite de Cauchy, l'inverse est faux.

### 1.1.2 Suite de Cauchy

**Définition 8** On dit qu'une suite  $(u_n)$  de réels est une suite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante, appelée critère de Cauchy

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Un espace dans lequel toute suite de Cauchy converge, alors l'espace est dit complet. Les espaces de Hilbert sont les espaces les plus proches des espaces euclidiens.

**Définition 9** Un espace de Hilbert est un espace normé muni d'un produit scalaire est complet.

**Exemple 10** L'espace  $L^2([a, b]) = \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$  est espace de Hilbert. Cet espace muni de la norme (1.1) est le plus utile.

**Remarque 11** Dans toute la suite, on ne considère que  $L^2([a, b], \|\cdot\|_2)$  comme espace de Hilbert.

## 1.2 Projection Orthogonale

Soit  $E$  l'espace de Hilbert,  $H = L^2([a, b], \|\cdot\|_2)$   $x \in H$  et  $F$  une partie non vide de  $H$ .

- Existe-t-il un point  $a \in F$  qui soit le plus proche de  $x$  ? C'est-à-dire tel que  $\forall y \in F, \|x - a\|_2 \leq \|x - y\|_2$ , Autrement dit

$$\|x - a\|_2 \leq \inf_{y \in F} \|x - y\|_2$$

- Si un tel point existe, est-il unique ?

**Définition 12** Deux éléments  $x$  et  $y$  d'un espace de Hilbert  $H$  sont dites orthogonaux, Si  $\langle x, y \rangle = 0$ , On écrit alors  $x \perp y$ .

- (a) On dit que deux parties  $F$  et  $G$  de  $H$  sont orthogonales si tout élément de  $F$  est orthogonals à tout élément de  $G$  on écrit alors  $F \perp G$ .
- (b) Orthogonal d'un partie  $F$  de  $H$ , noté  $F^\perp$ , est l'ensemble des éléments de  $H$  orthogonaux à  $F$ .
- (c) Un ensemble de vecteurs différents de zéro  $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$  serait un ensemble orthogonal si  $e_i \perp e_j \forall i \neq j$ .
- (d) Soit  $H$  un espace de Hilbert. un système orthonormé est un sous-ensemble  $E$  de  $H$  tel que pour tout  $e, y \in E$  nous avons

$$\langle e, y \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } e = y \\ 0 & \text{si } e \neq y \end{cases}$$

**Définition 13** L'orthogonal de  $S$  ( $S \subseteq G$ ) est l'ensemble de vecteurs de  $G$  orthogonaux à tous les vecteurs de  $S$  :

$$S^\perp = \{g \in G : \langle s, g \rangle = 0 \forall s \in S\}.$$

**Proposition 14** Soit  $H$  un espace de Hilbert.

1. L'orthogonal d'un sous-ensemble  $F$  de  $H$  est un sous-espace fermé de  $H$  et on a

$$F \cap F^\perp = \{0\}, F^\perp = (\overline{F})^\perp \text{ et } F \subset (F^\perp)^\perp$$

2. Si deux sous-ensembles  $F$  et  $G$  de  $H$ , vérifiant  $F \subset G$ , alors leurs orthogonaux vérifient  $G^\perp \subset F^\perp$

**Preuve.** La propriété (2) est triviale. Par ailleurs, il est clair que  $F^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $H$ , car si  $x$  et  $y$  sont dans  $F^\perp$  alors la linéarité montre que, pour tout  $z$  dans  $F$ , On a

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 0$$

Montrons que  $F^\perp$  est fermé : Soit  $(x_n)$  une suite de cauchy d'éléments de  $F^\perp$  est soit  $x$  sa limite. Pour tout  $y$  dans  $F$ , On a

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x - x_n, y \rangle| \leq \|x - x_n\| \|y\|$$

Le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini et donc  $\langle x, y \rangle = 0$ . Ceci étant pour tout  $y \in F$ , on en déduit que  $x$  appartient à  $F^\perp$  et donc  $F^\perp$  est un fermé.

D'autre part, puisque  $F \subset \overline{F}$  on a l'inclusion  $\overline{F}^\perp \subset F^\perp$ . Soit alors  $x$  un élément de  $F^\perp$  et  $y$  un élément de  $\overline{F}$ , il existe une suite  $(y_n)$  d'éléments de  $F$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y - y_n\| = 0$$

On a alors

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x, y - y_n \rangle| \leq \|x\| \|y - y_n\|$$

Le membre de droite tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini et il en résulte que  $\langle x, y \rangle = 0$ . Ainsi  $F^\perp$  est inclus dans  $(\overline{F})^\perp$ . ■

**Proposition 15** *Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert  $H$  et s'ils sont orthogonaux,  $F \perp G$ , alors l'ensemble  $F + G$  des éléments de la forme  $x + y$ , avec  $x \in F$  et  $y \in G$ , est un sous-espace fermé de  $H$ .*

**Preuve.** Il est clair que  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $H$ .

Soit  $(z_n)$  une suite de Cauchy dans  $F + G$ , pour tout  $n$  il existe  $x_n \in F$  et  $y_n \in G$ , tels que  $z_n = x_n + y_n$ ,  
et on a

$$\begin{aligned} \|z_n + z_m\|^2 &= \|x_n + x_m\|^2 + \|y_n + y_m\|^2 \\ \|x_n + x_m\|^2 &\leq \|z_n + z_m\|^2 \\ \|y_n + y_m\|^2 &\leq \|z_n + z_m\|^2 \end{aligned}$$

donc  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont des suites de Cauchy dans  $F$  et  $G$  respectivement. Comme  $F$  et  $G$  sont fermés,  $(x_n)$  converge vers un élément  $x$  de  $F$  et  $(y_n)$  converge vers un élément  $y$  de  $G$  et par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x + y$$

appartient bien à  $F + G$ . ■

## 1.3 Bases Hilbertiennes

**Définition 16** *Soit  $H$  un espace de Hilbert. La famille orthonormée  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormée de  $H$  si tout vecteur  $f$  est somme d'une série*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n e_n, \text{ i.e.,}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{n=0}^N c_n e_n \right\| = 0$$

Les coefficients  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont appelées les coordonnées du vecteur  $u$  dans la base  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et on écrit

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n e_n, \text{ ou } \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$$

Dans ce paragraphe, On généralise aux espaces de Hilbert les notions de base

orthogonale ou orthonormale dans l'espace euclidien, Cela passe inévitablement par la considération de séries de vecteurs. Dans une espace de Banach, un des critères généraux de convergence d'une série, dont on dispose, est celui de la convergence normale ( voir l'annexe ). Dans le cadre des espace de Hilbert, et pour les séries d'éléments deux à deux orthogonaux, il est possible d'avoir un autre critère.

**Théorème 17** Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $H$  deux à deux orthogonaux. la série  $\sum_i u_i$  converge si et seulement si la série numérique  $\sum_i \|u_i\|^2$  converge. Dans ce cas, on a la relation de Pythagore généralisée

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|u_i\|^2$$

**Preuve.** Soit  $(y_n)$  la suite des sommes partielles de la série  $\sum_i u_i$  et  $(\alpha_n)$  la suite des sommes partielles de la série  $\sum_i \|u_i\|^2$ . Le théorème de Pythagore assure que, pour deux entiers quelconques  $p < q$ ,

$$\left\| \sum_{i=p+1}^q u_i \right\|^2 = \sum_{i=p+1}^q \|u_i\|^2$$

peut être écrite

$$\|y_q - y_p\|^2 = |\alpha_q - \alpha_p|^2$$



Ainsi, la suite  $(y_n)$  est une suite de Cauchy si et seulement si la suite  $(\alpha_n)$  l'est aussi, et dans ce cas on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$$

Ce qui termine la démonstration. ■

**Théorème 18** (inégalité de Bessel)[6]

Pour tout  $x \in H$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \langle x, e_n \rangle e_n$  est convergente, sa somme est égale à  $P_F(x)$  et on a l'inégalité de Bessel

$$\sum_{n \geq 1} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|P_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

**Proposition 19** (Pythagore)

Si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont des éléments de  $H$  deux à deux orthogonaux. Alors

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

**Preuve.** Si  $x_1$  et  $x_2$  sont orthogonaux

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle = \|x_1\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x_1, x_2 \rangle) + \|x_2\|^2$$

comme  $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ , on déduit

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$$

■

Le théorème suivant caractérise les bases hilbertiennes.

**Théorème 20** Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $(e_n)$  une suite orthonormée dans  $F$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) la suite  $\{e_n, n \geq 1\}$  est une base hilbertienne de  $H$ .
- (b) Tout élément  $x$  de  $F$  s'écrit sous la forme :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

(c) *Quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $H$ , on a :*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$$

(d) *Pout tout  $x \in F$ , on a l'égalité de Parseval :*

$$||x||^2 = \sum_{n \geq 1} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

**Preuve.** Soit  $F$  le sous-espace de Hilbert engendré par la suite  $(e_n)$  et soit  $P_F$  l'opérateur de projection orthogonale sur  $F$ . La suite  $(e_n)$  est une base hilbertienne si et seulement si  $F = H$ , c'est-à-dire  $P_F = I$ , et théorème montre que (a) est équivalent à (b) et implique (c) et (d).

L'assertion (d) traduit le fait que pour tout  $x$  dans  $E$ , on a l'égalité

$$||x||^2 = ||P_F x||^2$$

et par suite

$$||x - P_F x|| = 0$$

Cela veut dire que

$$P_F = I$$

et donc

$$F = H$$

■

# Chapitre 2

## Les équations intégrales

### 2.1 Introduction

En mathématique, une équation intégrale est une équation dans laquelle une fonction inconnue apparaît sous le signe intégrale et à l'extérieur du signe intégrale. Il existe un lien étroit entre équation différentielle et intégrales, et certains problèmes peuvent être formulés de deux équations (différentielles et intégrales).

### 2.2 Equation intégrale :

Tout équation fonctionnelle

$$\lambda u(x) + f(x) = \int_a^b k(x, t) u(t) dt; \quad x \in [a, b] \quad (2.1)$$

est appelée équation intégrale (2.1)

ou  $u(x)$  est l'inconnue,  $f(x)$  et  $k(x, t)$  sont des fonctions données ; et  $\lambda$  un paramètre qui a sens physique, que l'on supposera  $\lambda = 1$ .

## 2.3 Classification des équations intégrales

1. **Equation intégrale de Fredholm** On appelle une équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espèce une équation de la forme

$$u(x) - \int_a^b k(x, t)u(t) = f(x); x \in [a, b] \quad (2.2)$$

où :  $u(x)$  est la fonction inconnue,  $k(x, t)$  et  $f(x)$  des fonctions données,  $x$  et  $t$  deux variables réelles parcourant l'intervalle  $[a, b]$  La fonction  $k(x, t)$  est le noyau de l'équation intégrale (2.2) ; on suppose que le noyau  $k(x, t)$  est défini et continu dans  $[a, b] \times [a, b]$ , ou bien présente des discontinuités telles que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt < \infty$$

si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (2.2) est dite non homogène. dans le cas contraire, l'équation intégrale (2.2) s'écrit

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)u(t) = 0 \quad (2.3)$$

et on dit qu'elle est homogène Une équation intégrale de la forme

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t) = f(x) \quad (2.4)$$

où la la fonction inconnue  $u(x)$  n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce. Les bornes  $a$  et  $b$  dans les équations (2.2), (2.3) et (2.4) peuvent être aussi bien finies qu'infinies. On appelle solution des équations intégrales (2.2), (2.3) et (2.4) toute fonction  $u(x)$  telle qu'après sa substitution dans l'équation, celle-ci devient une identité en  $x \in [a, b]$ .

2. **Equation intégrale de Volterra :**

On appelle équation intégrale de Volterra linéaire de seconde espèce une équation de la forme

$$u(x) - \int_a^x k(x, t)u(t)dt = f(x)$$

où  $u(x)$  est une fonction inconnue et  $k(x; t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues.

1. Une équation de la forme

$$\int_a^x k(x, t)u(t)dt = f(x)$$

où  $u(t)$  est une fonction inconnue est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce.

2. On appelle une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation de la forme.

$$u(x) - \int_a^x k(x, t)u(t)dt = f(x)$$

où  $u(x)$  est une fonction inconnue,  $k(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues.

3. si  $f(x) = 0$  l'équation s'écrit :

$$\int_a^x k(x, t)u(t)dt = u(x)$$

4. Une équation à une inconnue  $u(x)$ , de la forme :

$$- \int_a^x k(x, t)u(t)dt = f(x)$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

## 2.4 Existence et l'unicité de la solution

L'équation qui va nous intéresser dans la suite est l'équation de Fredholm

$$u(x) - \int_a^b k(x, t)u(t)dt = f(x)$$

On désigne par  $[a, b]$  un ensemble compact inclu dans  $\mathbb{R}^N$  et soit  $\mathbb{C}([a, b])$  l'espace des fonctions continues sur  $[a, b]$ , cet espace est muni de la norme uniforme

$$\|f\|_2 = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$$

On va considérer des équations mettant en jeu des intégrales, sous la forme d'un opérateur linéaire.

**Définition 21** Soit  $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue on appelle opérateur intégrale à noyau  $k(., .)$  l'opérateur défini par :

$$K : u \in \mathbb{C}([a, b]) \mapsto k(u) \in \mathbb{C}([a, b])$$

$$K(u)(x) = \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

Cet opérateur est continue, de norme

$$\|K\|_2 = \left( \int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

**Théorème 22** de la série géométrique de Neumann

Soit  $V$  un espace de Hilbert,  $L$  un opérateur linéaire borné,  $L \in \ell(V)$  et  $I$  opérateur identique, Supposons que

$$\|L\| < 1 \quad (2.5)$$

Alors l'opérateur  $(I - L)$  est inversible dans  $V$  et  $(I - L)^{-1}$  est borné tel que :

$$\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|} \quad (2.6)$$

**Preuve.** Voir [1] ■

**Résultat :** Sous les hypothèse du théorème 22 pour tout  $f \in V$  l'équation

$$(I - L)u = f$$

admet une solution unique dans  $V$  telle que :

$$u = (I - L)^{-1}.f \in V$$

## 2.5 Résolution numérique :

Dans les équations EDP ou les équations intégrales, les solutions exactes sont très très difficiles à expliciter, voire impossible. On fait donc, recours aux méthodes numériques.

### 2.5.1 Méthodes numériques :

Les méthodes de résolution analytiques des équations intégrales ne s'appliquent en général que pour certaines équations particulières, mais pour traiter une grande classe des équations intégrales on doit utiliser les méthodes numériques approchées., telles que

- Les méthodes de Nystrom.
- Les méthodes de projection :

(a) Galerkin.

(b) Collocation.

et il existe d'autres méthodes.

### 2.5.2 Méthode de collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliquée à la résolution approchée de l'équation de Fredholm de second espèce.

$$u(x) - \int_0^1 k(x, t) u(t) dt = f(x) \quad (2.7)$$

$$r_n(x) = u(x) - \int_0^1 k(x, t) u(t) dt - f(x)$$

consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie. En exigeant que l'équation(2.7) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in [0, 1]$  telle que :

$$r_n(x_i) = 0, \quad n = 1, \dots, k_n$$

qui vont déterminer les coefficients  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n c_j \left\{ h_j(x_i) - \int_0^1 k(x_i, t) h_j(t) dt \right\} = f(x_i) \quad i = 1, \dots, k_n$$

d'où

$$\sum_{j=1}^n c_j h_j(x_i) = \sum_{j=1}^n \int_0^1 k(x_i, t) h_j(t) dt + f(x_i) \quad i = 1, \dots, k_n$$

Nous introduisons un opérateur de projection  $P_n : H([0, 1]) \rightarrow H_n$

Soit  $h \in H([0, 1])$  on définit  $P_n h$  comme élément de  $H_n$  l'interpolation de  $h$  aux points  $x_i$ .

$$P_n u(x) = u_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j h_j(x)$$

Donc

$$P_n u(x_i) = \sum_{j=1}^n \int_0^1 k(x_i, t) h_j(t) dt + f(x_i) = \sum_{j=1}^n c_j h_j(x_i)$$

Alors les coefficients  $c_j$  sont déterminés par la résolution du système

$$\sum_{j=1}^n c_j h_j(x_i) = u(x_i)$$

Mais ce système admet une solution unique si

$$\det |u_j(x_i)| \neq 0$$

donc  $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$  constituent un système linéairement indépendant.

Dans ce travail, nous allons utiliser ondelettes de Haar, qui est une nouvelle méthode, pour résoudre les équations intégrales.



# Chapitre 3

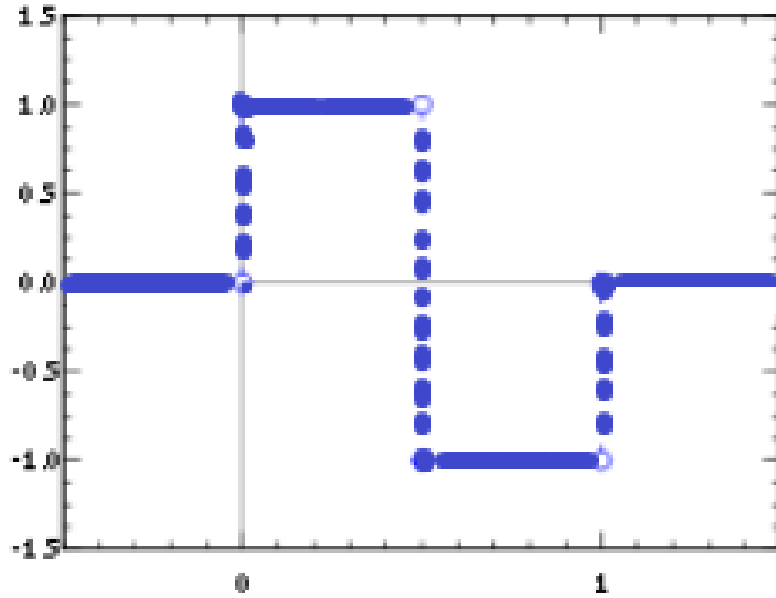
## Ondelette de Haar

### 3.1 introduction :

L'ondelette de Haar, ou fonction de Rademacher, est une ondelette inventée par Alfréd Haar en 1909. On considère que c'est la première ondelette connue. Il s'agit d'une fonction constante par morceaux, ce qui en fait l'ondelette la plus simple à comprendre et à implémenter.

**Définition 23** *La fonction de Haar est une fonction constante par morceaux :*

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Ondelette de Haar

### 3.2 Système de Haar

Le système de Haar est une suite de fonctions continues par morceaux appartenant à  $L^2([0, 1], ||\cdot||_2)$ , Il est défini de la manière suivante, à partir des fonctions indicatrices :

1.  $h_1(t) = 1_{[0,1]}(t)$ .
2. Pour  $k \geq 0$  et  $1 \leq l \leq 2^k$

$$h_{2^k+l}(t) = 1(t) \left[ \frac{2l-2}{2^{k+1}}; \frac{2l-1}{2^{k+1}} \right] - 1(t) \left[ \frac{2l-1}{2^{k+1}}; \frac{2l}{2^{k+1}} \right]$$

$1_{[a,b]}(t)$  : la fonction indicatrice sur l'intervalle  $[a, b]$

Ou bien

$$\left\{ h_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} h(2^j t - k) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$$

est appelle système de Haar sur  $\mathbb{R}$ ,  $\{h_i\}$  forme une base orthonormée ( $\|h_i\| = 0, \quad \forall i$ ) dans  $L^2([0, 1], \|\cdot\|_2)$ .

Les intervalles dans le système de Haar :

$$I_{n,k} = [2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)] , .k = 0, \dots, 2^i - 1$$

### 3.3 Propriétés d'ondelette de Haar :

([7])

1. L'ondelette de Haar est très bien localisée dans le domaine de temps, mais non continue.
2.  $\int_0^\infty h(t)dt = 0$  et  $\int_0^\infty |h(t)|^2 dt = 1$ .
3. Toute fonction continue peut être rapprochée par combinaison linéaire de  $h(t), h(2t), h(4t), \dots, h(2^k t), \dots$  et de leurs fonctions décalées. Ceci prolonge l'espace des fonctions à n'importe quelle fonction peut être rapprochée par des fonctions continues.
4. Toute fonction continue peut être rapprochée par la combinaison linéaire des fonctions constantes  $h(t), h(2t), h(4t), \dots, h(2^k t)$  ..et de leurs fonctions décalées.
5. Les fonctions de haar sont deux à deux orthogonales.

$$\int_0^1 h_i(t)h_l(t) = \begin{cases} 1/m & \text{pour } i = l \\ 0 & \text{pour } i \neq l \end{cases}$$

6. La fonction d'ondelette ou la fonction de graduation avec la balance différente m ont un rapport fonctionnel  $h(t) = h(2t) + h(2t - 1)$  et  $h(t) = h(2t) - h(2t - 1)$

### 3.4 Methode d'ondelette de Haar :

Les ondelettes de Haar sont de la forme

$$h_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_1, t_2] \\ -1 & \text{si } t \in [t_2, t_3] \\ 0 & \text{sin on} \end{cases} \quad (3.1)$$

où

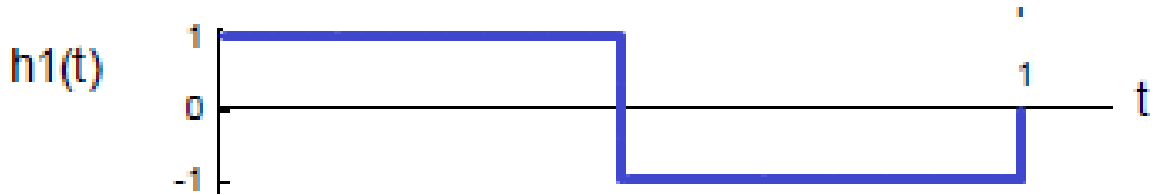
$$t_1 = \frac{k}{m}, t_2 = \frac{k+0.5}{m}, t_3 = \frac{k+1}{m} \quad (3.2)$$

sont présentés. Le nombre entier  $m = 2^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$ , indique le niveau de l'ondelette;  $k = 0, 1, \dots, m-1$  est le paramètre de traduction. Le nombre entier  $J$  détermine le niveau maximal de la résolution. L'index  $i$  est calculé à partir de la formule  $i = m + k + 1$ . Ici la valeur minimale est  $i = 2$  (puis  $m = 1, k = 0$ ); la valeur maximale est  $i = 2M$ , où  $M = 2^J$ . les correspondons de l'index  $i = 1$  à la graduation fonctionnent

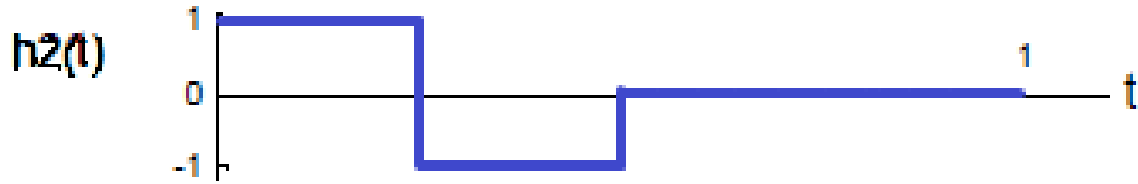
$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{sin on} \end{cases}$$



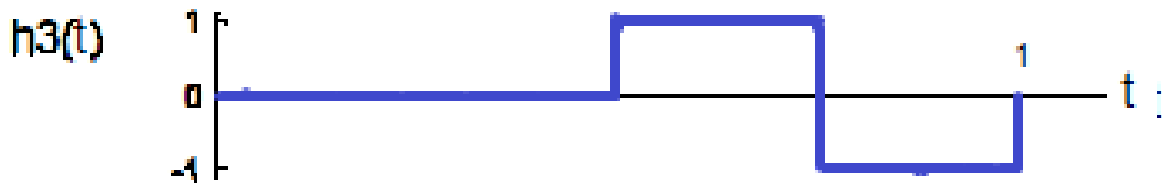
$$h_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & \text{si } 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{sin on} \end{cases}$$



$$h_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1/4 \\ -1, & \text{si } 1/4 \leq t < 1/2 \\ 0, & \text{sin on} \end{cases}$$

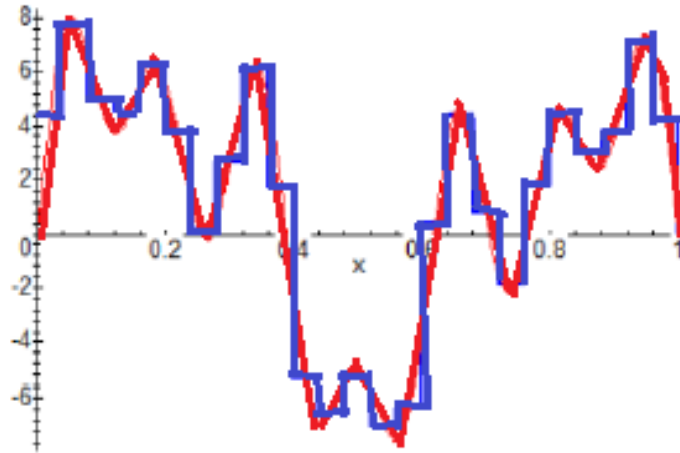


$$h_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{sin on} \\ 1, & \text{si } 1/2 \leq t < 3/4 \\ -1, & \text{si } 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

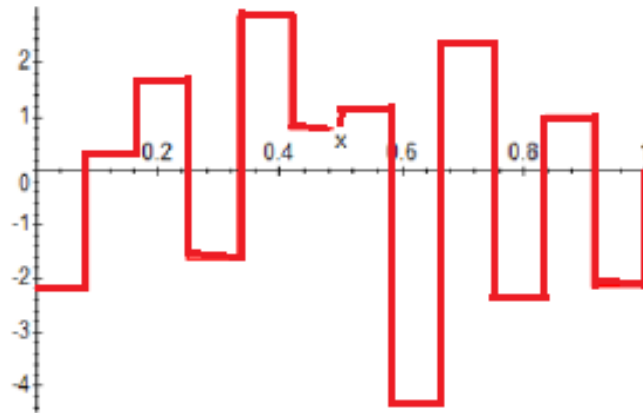


$$h_4(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1/8 \\ 1, & \text{si } 1/8 \leq t < 1/4 \\ 0, & \text{sin on} \end{cases}$$





La fonction en rouge est approchée par les fonctions de Haar qui sont en bleu.



les fonctions de Haar qui approche la fonction

$$f(x) = \sin(2\pi x) + 5 \sin(3\pi x) + 0.1 \sin(0.5\pi x) + 3 \sin(7\pi x) + 3 \sin(13\pi x)$$

Divisons l'intervalle  $[0, 1]$  en  $2M$  de la longueur égale  $\Delta t = 1/(2M)$ , et introduit Les points de collocations

$$t_l = (l - 0.5)/(2M), \quad l = 1, 2, \dots, 2M \quad (3.3)$$

D'après Chen et Hsiao [3], la matrice  $H$  de coefficient de Haar est présentée. C'est une matrice  $2M \times 2M$  avec élément  $H(i, l) = h_i(t_l)$  qui est une matrice carrée d'ordre  $2M \times 2M$ ,

Par exemple  $j = 1 \Rightarrow M = 2$ . alors nous avons

$$H(4, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tout fonctions  $\varphi(x)$  qui est défini dans l'intervalle  $t \in [0, 1]$  peut être augmenté dans la série d'ondelette de Haar

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2M} \lambda_i h_i(x) \quad (3.4)$$

où  $\lambda_i$  sont les coefficients d'ondelettes,.Le discret de cette équation est

$$u(x_l) = \sum_{i=1}^{2M} \lambda_i h_i(x_l) = \sum_{i=1}^{2M} \lambda_i H_{il} \quad (3.5)$$

ou dans un  $u = \lambda H$  de présentation de matrice où  $u$  et  $\lambda$  vecteurs de rangée dimensionnels de  $2M$ .

– L'erreur est donnée par :

$$E = \|u(x_l) - u_{ex}(x_l)\|_2 \quad (3.6)$$





# Chapitre 4

## Application

On considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce est donné par

$$u(x) - \int_0^1 k(x, t)u(t)dt = f(x); \quad x \in [a, b] \quad (4.1)$$

tels que,  $u(x)$  une fonction inconnue,  $f(x)$  et  $k(x, t)$  sont des fonctions donnés. et chercher la solution sous la forme :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2M} \lambda_i h_i(x) \quad (4.2)$$

où  $\lambda_i$  sont les coefficients d'ondelette à déterminer.

$$\sum_{i=1}^{2M} \lambda_i h_i(x) - \int_0^1 k(x, t) \left( \sum_{i=1}^{2M} \lambda_i h_i(t) \right) dt = f(x) \quad (4.3)$$

Mise de ce résultat dans (3.5) nous trouvons

$$\sum_{i=1}^{2M} \lambda_i h_i(x) - \sum_{i=1}^{2M} \lambda_i G_i(x) = f(x) \quad (4.4)$$

où

$$G_i(x) = \int_0^1 k(x, t)h_i(t)dt \quad (4.5)$$

### 1. La méthode de Collocation :

Satisfaire(4.4) les points de collocation (3.3) nous obtenons un système des équations linéaire pour les coefficients  $\lambda_i$  :

$$\sum_{i=1}^{2M} \lambda_i [h_i(x_l) - G_i(x_l)] = f(x_l), \quad l = 1, 2, \dots, 2M \quad (4.6)$$

la matrice de de ce système est

$$\begin{aligned} u &= \lambda H \\ \lambda(H - G) &= F \end{aligned} \quad (4.7)$$

où

$$G = G_i(x_l), F = f(x_l)$$

**Exemple 24** considérons l'équation

$$u(x) - \int_0^1 (x+t)u(t)dt = x^2$$

on a :  $f(x) = x^2$ , et  $k(x, t) = x + t$

où la solution exacte est :

$$u_{ex}(x) = x^2 - 5x - 17/6$$

Dans le cas actuel

$$G_i(x) = \begin{cases} x + 0.5 & \text{pour } i = 1 \\ -\frac{1}{4m^2} & \text{pour } i > 1 \end{cases}$$

Si nous appliquons la méthode de collocation, alors le vecteur  $\lambda$  peut être calculé à partir le système (4.7)

pour  $j = 1$ , donc  $M = 1$  et  $l, i = 1, 2$

on a :  $G_i(x_l) = \int_0^1 k(x_l, t)h_i(t)dt$ .

on pose  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = \frac{1}{4}$ . alors  $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$ ;  $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$

$$\begin{aligned} G_1(x_1) &= \int_0^1 k(x_1, t)h_1(t)dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + t\right) h_1(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} + t\right) h_1(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{3} + t\right) h_1(t) dt = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(x_1) &= \int_0^1 k(x_1, t)h_2(t)dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + t\right) h_2(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{3} + t\right) h_2(t) dt + \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{1}{3} + t\right) h_2(t) dt = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1(x_2) &= \int_0^1 k(x_2, t) h_1(t) dt = \int_0^1 \left( \frac{1}{4} + t \right) h_1(t) dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{4} + t \right) h_1(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{1}{3} + t \right) h_2(t) dt = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2(x_2) &= \int_0^1 k(x_2, t) h_2(t) dt = \int_0^1 \left( \frac{1}{4} + t \right) h_2(t) dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{4}} \left( \frac{1}{4} + t \right) h_2(t) dt + \int_{\frac{1}{4}}^1 \left( \frac{1}{4} + t \right) h_2(t) dt = -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 \lambda_i \left[ h_i(x_l) - \int_0^1 k(x_l, t) h_i(t) dt \right] &= f(x_l) \\
\begin{cases} \lambda_1 [h_1(x_l) - G_1(x_l)] = f(x_l) \\ \lambda_2 [h_2(x_l) - G_2(x_l)] = f(x_l) \end{cases}
\end{aligned}$$

pour  $l = 1$

$$\begin{cases} \lambda_1 [h_1(x_1) - G_1(x_1)] = f(x_1) \\ \lambda_2 [h_2(x_1) - G_2(x_1)] = f(x_1) \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{6}; \quad \lambda_2 = \frac{m^2}{-16m^2 + 4}.$$

on a  $m = 2^j$  alors  $m = 2$

la solution approchée

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i h_i(x) \\
&= \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x) \\
&= \frac{1}{6} h_1(x) + \frac{m^2}{-16m^2 + 4} h_2(x) \\
&= \frac{1}{6} h_1(x) - \frac{1}{15} h_2(x)
\end{aligned}$$

$$Erreur = \|e\|_2 = \|u_{ex} - u\|_2 = \left( \int_0^1 |u_{ex}(x) - u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$j$	$2M$	$\ e\ _2$
2	8	0.0045
3	16	2.8743e-0.04
4	32	1.8246e-005

#### 4.0.1 Système linéaire des équations intégrales de Fredholm :

On considère le Fredholm linéaire suivant système d'équation intégrale :

$$u_r(x) - \sum_{i=1}^n k_{rs}(x, t) u_s(t) dt = f_r(x) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

Où :  $f_r \in L^2([0, 1])$ ,  $k_{rs} \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$  pour  $r, s = 1, 2, \dots, n$ . et  $u_r$  sont des fonctions inconnues (4.6)

nous pouvons l'écrire comme forme

$$\mathbf{U}(x) - \int_0^1 K(x, t) \mathbf{U}(t) dt = F(x) \quad (4.9)$$

où

$$\mathbf{U}(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix},$$

$$K(x, t) = \begin{bmatrix} k_{11}(x, t) & k_{12}(x, t) & \dots & \dots & \dots & k_{1n}(x, t) \\ k_{21}(x, t) & k_{22}(x, t) & \dots & \dots & \dots & k_{2n}(x, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1}(x, t) & k_{n2}(x, t) & \dots & \dots & \dots & k_{nn}(x, t) \end{bmatrix}$$

Remplacement (3.4) dans (4.8) nous trouvons

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{1_i} h_i(x) \\ \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{2_i} h_i(x) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{n_i} h_i(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{1_i} \\ \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{2_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{n_i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdot & \cdot & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdot & \cdot & G_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdot & \cdot & G_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

nous pouvons l'être écrit comme forme

$$\sum_{i=1}^{2M} \lambda_{r_i} h_i(x) - \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{r_i} G_i(x) = F(x) \quad (4.10)$$

où

$$G_i(x) = \begin{bmatrix} G_{11} = \int_0^1 k_{11}(x, t) h_i(t) dt & \cdot & \cdot & \cdot & G_{1n} = \int_0^1 k_{1n}(x, t) h_i(t) dt \\ G_{21} = \int_0^1 k_{21}(x, t) h_i(t) dt & \cdot & \cdot & \cdot & G_{2n} = \int_0^1 k_{2n}(x, t) h_i(t) dt \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{n1} = \int_0^1 k_{n1}(x, t) h_i(t) dt & \cdot & \cdot & \cdot & G_{nn} = \int_0^1 k_{nn}(x, t) h_i(t) dt \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

après nous évaluerons les coefficients  $\lambda_i$  d'ondelette par la méthode de collocation.

Satisfaire (4.10) seulement aux points de collocation (3.3) nous obtenons un système des équations linéaires :

$$\sum_{i=1}^{2M} \lambda_{r_i} h_i(x_l) - \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{r_i} G_i(x_l) = F(x_l) \quad l = 1, 2, \dots, 2M, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4.12)$$

La forme de matrice de ce système est

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{1_i} \\ \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{2_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{n_i} \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} H - G_{11} & -G_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & -G_{n1} \\ -G_{21} & H - G_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & -G_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -G_{1n} & -G_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & H - G_{nn} \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}^T \quad (4.13)$$

où  $A(B) = F$  et  $A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{1_i} & \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{2_i} & \dots & \sum_{i=1}^{2M} \lambda_{n_i} \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} H - G_{11} & -G_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & -G_{n1} \\ -G_{21} & H - G_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & -G_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -G_{1n} & -G_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & H - G_{nn} \end{bmatrix}, \quad H(i, l) = h_i(t_l)$$

En résolvant le système linéaire (4.13) nous pouvons trouver le coefficient  $\lambda_i$  d'ondelette.

**Algorithme 25** Voir [4]

- Diviser l'intervalle  $[0, 1]$  sur  $2M$  une partie de longueur égale  $1/2M$ .
- Calcul la matrice de  $G$  évaluent prés les intégrales dans l'équations.(4.11)
- Calculer les coefficients d'ondelette  $\lambda_i$  par la méthode de collocation.(4.12)
- Résoudre le système linéaire (4.13) par multiplication il avec  $B^{-1}$ .

**Exemple numérique**

$$u_1(x) = x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{9}{14} + \int_0^1 (x^3 + 2t) u_1(t) dt.$$

$$u_2(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{7} + \int_0^1 x^2 u_1(t) dt + \int_0^1 (x - t^2) u_2(t) dt.$$

avec la solution exacte  $u_1(x) = x^2 + 1$ ,  $u_2(x) = x^4$  quand  $J = 2$  nous obtenons les résultats dans le tableau (2)

$x$	$u_1$ exact	d'ondelette de Haar	$u_2$ exact	d'ondelette de Haar
0.0625	1.0039062500	1.0135609855	0.0000152587	0.0007324117
0.1875	1.0351562500	1.0448814721	0.0012359619	0.0026920627
0.3125	1.0976562500	1.1076471520	0.0095367431	0.0120788023
0.4375	1.1914062500	1.2019881543	0.0366363525	0.0406113806
0.5625	1.3164062500	1.3280346080	0.1001129150	0.1058679226
0.6875	1.4726562500	1.4859166420	0.2234039306	0.2312859282
0.8125	1.6601562500	1.6757643852	0.4358062744	0.4461622725
0.9375	1.8789062500	1.8977079666	0.7724761962	0.7856532055
E		3.5350e-004		1.7363e-004

Table (2) : Une comparaison entre la solution exacte et numérique de la méthode d'ondelette de Haar quand ( $J = 2$ )



# Bibliographie

- [1] A KENDAL : "Fredholm intégral equation " ; Springer, 2006.
- [2] Amos shalit "A first cours on functional analysis", Springer, 2017.
- [3] Chen C. F. and Hsiao C. H., Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems, IEE Proc., Control Theory Appl., 144 (1997), 87—94.
- [4] Gada H. Ibrahe "Numerical Solution of Linear System of fredholm intégral.equation" Baghdad University ; .journal of principal Education.74, 201
- [5] Ulo Lepik, Enn Tamme, Institute of Applied Mathematics, University of Tartu Liivi 2, 50409 Tartu, ESTONIA
- [6] houcine Chebli "ANALYSE HILBERTIENNE",Centre de publication Universitaire.Tunis, 2001.
- [7] BISHNUPRIYA SAHOO,"A PROJECT REPORT" Institute of technology Rourkela-769008.